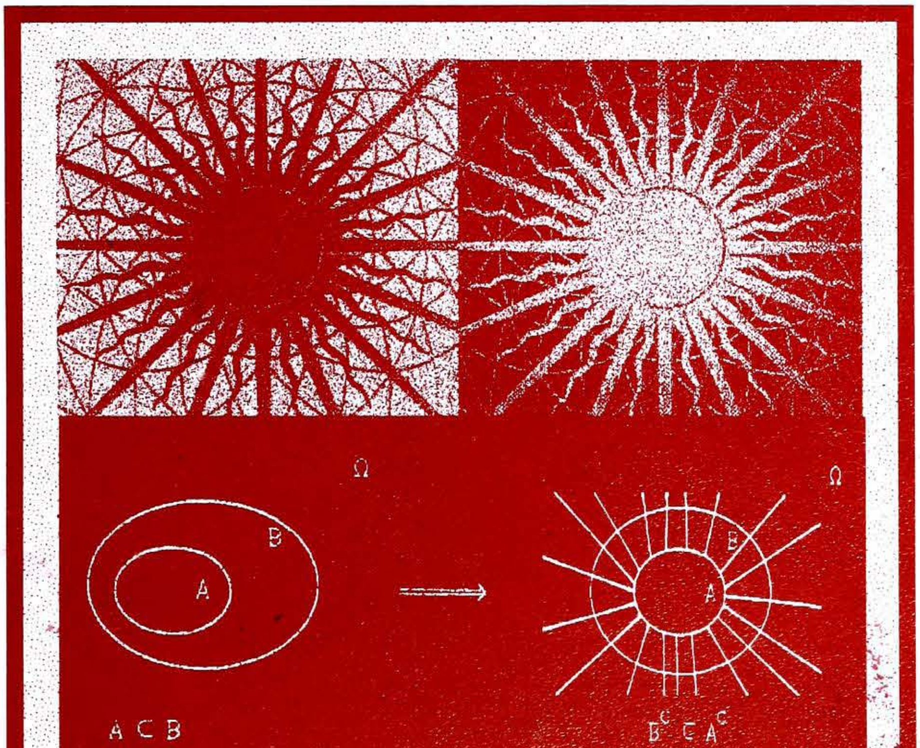
Taller de probabilidad y estadística
Conjuntos

Javier Ramírez Rodríguez
Jorge Rivera Benítez



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

EDITOR: DAVID LIZCANO CABRERA

Taller de probabilidad y estadística

Conjuntos

Javier Ramírez Rodríguez
Jorge Rivera Benítez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

ISBN: 970- 654-700-2

Ilustración de Portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
tel. 5318-9222/9223. Fax 5318-9222

2a. edición, 2001

Impreso en México.

2. CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

Más que una introducción a unas notas de conjuntos, los comentarios que siguen deben verse como un guión o guía para el profesor (o lector independiente) que desee apoyarse en este cuaderno de problemas, pues el origen de este cuaderno fue para un taller opcional para los alumnos de Probabilidad y Estadística de la UAM-Azc. Sin embargo, se intentó que el contenido fuera autosuficiente, siguiendo el consejo de R. P. Boas[1] (Universidad de Chicago): evitar el formalismo de las matemáticas y aprovechar la habilidad del lector para que él mismo generalice a partir de los ejemplos.

El guión de este cuaderno girará sobre las siguientes preguntas: ¿Por qué interesan los conjuntos en probabilidad y estadística?, ¿qué nos interesa saber de ellos?

Como sabemos, el experimentador no espera observar un solo resultado sino un conjunto de resultados, también le interesa contar cuántas veces ocurrió un resultado para dar su frecuencia teórica o empírica de un evento o eventos particulares en que está interesado. Con esto en mente, el propósito de este cuaderno lo podemos reseñar en tres metas:

i) Es cómodo representar los posibles resultados como subconjuntos, en particular los subconjuntos que le interesan especialmente al experimentador: un conjunto particular, su opuesto (complemento), los que resultan de intercalar el conectivo "y" en dos eventos de interés A y B (su intersección), o el conjunto que resulta de intercalar el conectivo "o" (la unión de A y B), etc.

---

(1) R. P. Boas, Can we make mathematics intelligible? American Mathematics Monthly. Vol. 88, 1981. pp 727-731 Reseñado en Chvatal, V. Linear Programming, Freeman. New York, 1983.

ii) El experimentador debe contar fácilmente el tamaño de los conjuntos en que está interesado pero sin contar doble, por ejemplo, como contar el tamaño de la unión A y B.

iii) Si no puede contarlos, se conforma con comparar qué tan grande o pequeño es con respecto a otro conjunto. Por ejemplo, la intersección de A y B es un subconjunto de A y por lo tanto, más pequeño, pero también es subconjunto de B, por lo tanto, una mejor cota para su tamaño será el de menor o igual que el mínimo de los tamaños de A y B, etc.

Estas tres metas pueden servir de resumen al lector de lo que se pretende que aprenda y así, en lugar de usar estos comentarios como introducción, los puede usar como un sumario o resumen, incluso tuve la intensión de colocarlo al final y no al principio de este cuaderno.

Jorge Rivera Benítez.

2.1 Supón que se tienen los siguientes conjuntos: $U=\{a,b,c,d,e\}$ que representa el conjunto universal; $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{b,c,d\}$. Con base en lo anterior, encuentra:

1) $A \cup B$;	6) $A^c \cap B^c$;
2) B^c;	7) $(A \cap B)^c$;
3) $B \cap A$;	8) $A \cup B^c$;
4) $B - A$;	9) $B^c - A^c$;
5) $A^c \cap B$;	10) $(A \cup B)^c$

SOLUCIÓN

1) La unión de A y B consta de todos los elementos de A o B o de ambos, o sea, $A \cup B=\{a,b,c,d\}$

2) El complemento de B es el que reúne a los elementos del universo que no están en B, es decir $B^c=\{a,e\}$

3) La intersección de A y B cuenta con los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B, es decir, que se encuentran en ambos conjuntos: $A \cap B=\{b,c\}$

4) La diferencia de B y A incluye a los elementos de B que no pertenecen a A; $B - A=\{d\}$

5) $A^c=\{d,e\}$ $B=\{b,c,d\}$, entonces $A^c \cap B=\{d\}$

6) $A^c=\{d,e\}$ y $B^c=\{a,e\}$, entonces $A^c \cap B^c=\{e\}$

7) $A \cap B= B \cap A$ (ver el número 3), así $(A \cap B)^c=\{a,d,e\}$

8) $B^c=\{a,e\}$ y $A=\{a,b,c\}$, entonces $A \cup B^c=\{a,b,c,e\}$

9) $B^c - A^c=\{a\}$

10) $(A \cup B)^c=\{e\}$

2.2 A un grupo de 100 alumnos de la materia de probabilidad, se les indica que levanten la mano para contabilizar cuántos ya cursaron Matemáticas, Física o ambas materias, y se obtuvieron los siguientes resultados:

70 alumnos ya cursaron Matemáticas,

60 cursaron Física y

40 ambas materias.

a) ¿Cuántos ya estudiaron Física pero no Matemáticas?

b) ¿Cuántos cursaron Matemáticas pero no Física?

c) ¿Cuántos cursaron Matemáticas o Física?

d) ¿Cuántos no levantaron la mano y qué característica tienen estos alumnos?

SOLUCIÓN

El grupo bajo estudio, indiquémoslo por Ω, puede dividirse en aquellos que cursaron Matemáticas y los que no la cursaron. Indicando por M al subconjunto de alumnos que cursaron Matemáticas y por M^c a los que no la cursaron, la división anterior queda representada por:

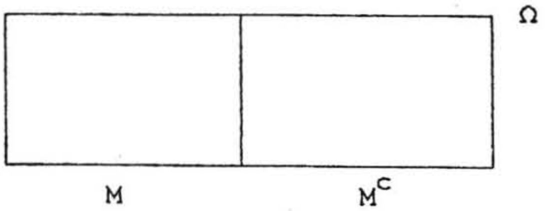
$$\Omega = M \cup M^c$$

Como se aprecia claramente, un alumno que está en M no estará en M^c, o sea, M y M^c son desunidos (ajenos).

Vamos a convenir en escribir la unión de dos conjuntos desunidos A y B por A + B en lugar de $A \cup B$. Esta convención sólo la seguiremos cuando son desunidos, pero en el caso de que no lo sean, su unión se indicará en la forma usual. Siguiendo la convención anterior, la división de Ω en los alumnos que cursaron Matemáticas y en los que no la han cursado queda dada por:

$$\Omega = M + M^c$$

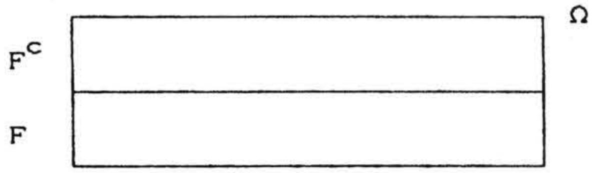
Esta división de Ω puede representarse en el siguiente esquema:



En esta división ignoramos la otra característica que pueden tener los elementos del grupo Ω, o sea, la propiedad de haber cursado o no Física. Si ahora olvidamos la característica de haber cursado Matemáticas, el mismo grupo Ω puede dividirse en aquellos que ya cursaron Física (indicado por F) y los que no la han cursado (F^c):

$$\Omega = F + F^c$$

Esta división aparace en el siguiente esquema:



En las dos divisiones anteriores, hemos clasificado a los elementos de Ω por tener una propiedad particular o no tenerla, ignorando la otra propiedad. Ahora nos interesa dividir Ω considerando ambas propiedades simultáneamente y así con un poco de esfuerzo mental podemos distinguir que los elementos de Ω caen en alguno de los siguientes subgrupos

Alumnos que cursaron Matemáticas pero no Física.
Alumnos que cursaron Física pero no Matemáticas.
Alumnos que cursaron ambas materias.
Alumnos que no han cursado Matemáticas ni Física.

Después veremos una manera fácil de obtener esta división de Ω, por el momento nos interesa usar nuestra intuición.

El subgrupo de alumnos que cursaron Matemáticas pero no Física está representado por la intersección de los subconjuntos M y F^c. Esta intersección se denota por $M \cap F^c$, pero acordaremos abreviarla por MF^c. La supresión (eliminación) del símbolo $\cap$ para la intersección de conjuntos tendrá gran ventaja cuando estén involucrados varios subconjuntos. Las ventajas de esta economía las verás más abundantemente en probabilidad condicional e independencia y te alegrarás de haber se sumado a tal abreviación.

El subgrupo de alumnos que cursaron Física pero no Matemáticas corresponde a la intersección $M^c \cap F$ que también se abreviará por M^cF. Similarmente la intersección MF representará a los alumnos que cursaron ambas materias y M^cF^c indicará a los que no han cursado ninguna de las dos materias. Así

MF^c:	Alumnos que cursaron Matemáticas pero no Física.
M^cF:	Alumnos que cursaron Física pero no Matemáticas.
MF:	Alumnos que cursaron ambas materias.
M^cF^c:	Alumnos que no han cursado Matemáticas ni Física.

Simbólicamente, la división de Ω conjuntando ambas propiedades a la vez, está dada por:

$$\Omega = MF^c + M^cF + MF + M^cF^c$$

Donde nuevamente insistimos que los subconjuntos del lado derecho son desunidos, por lo que, en lugar de usar el símbolo $\cup$ usamos el símbolo +. Una representación esquemática de esta división se da en la siguiente figura

Ω

F^c	MF^c	M^cF^c
F	MF	M^cF
	M	M^c

La división anterior de Ω en cuatro subconjuntos la presentamos en una forma intuitiva, sin embargo podemos derivarla también de manera más "abstracta" como sigue.

Primero observe, que si intersectamos Ω consigo mismo, obtenemos otra vez Ω:

$$\Omega = \Omega\,\Omega$$

Ahora, podemos reemplazar Ω por $\Omega = M + M^c$ y también por $\Omega = F + F^c$ para obtener:

$$\Omega = (M + M^c)(F + F^c)$$

Que simplificando se obtienen las siguientes expresiones:

$$\Omega = (M + M^C)F + (M + M^C)F^C$$

$$\Omega = MF + M^CF + MF^C + M^CF^C$$

Nótese que el significado de los subconjuntos involucrados resulta completamente claro y coincide con la interpretación de los subconjuntos en que dividimos intuitivamente a Ω.

Los cuatro subconjuntos anteriores obtenidos al conjuntar las dos propiedades de pertenencia reciben el nombre de *átomos* o *miniconjuntos*.

Note dos características importantes que tienen estos átomos:

i) Son desunidos. Compare, por ejemplo, los átomos MF^C y M^CF y resulta claro que si un alumno está en MF^C seguro no estará en M^CF ¿Por qué? Puede seguir considerando otros pares de átomos y llegará a la misma conclusión.

ii) Como la unión de los átomos es Ω y, por lo tanto, incluye a cualquier alumno de Ω, entonces cualquier subconjunto de Ω puede escribirse como la unión de átomos con la gran ventaja de que es una unión que involucra subconjuntos desunidos y, por lo tanto, no tendrás miedo de contar doble cuando digas que el tamaño del conjunto de interés es la suma de los tamaños de cada uno de los átomos involucrados en la unión. Por ejemplo, los alumnos que cursaron Física también pudieron haber cursado o no Matemáticas y por lo tanto, el subconjunto F quede descrito por la unión de los átomos FM y FM^C

$$F = FM + FM^C$$

Otros subconjuntos representados por medio de átomos se muestran enseguida

$$F^C = F^CM + F^CM^C$$
$$F \cup M = FM^C + F^CM + FM$$
$$M = MF + MF^C \quad , \text{etc.}$$

La representación mostrada anteriormente del subconjunto F por dos átomos: $F = FM + FM^c$ también puede derivarse mecánicamente al intersectar F con Ω y luego reemplazar Ω por $\Omega = M + M^c$ o sea

$$F = F\Omega = F(M + M^c) = FM + FM^c$$

De la misma manera, los que cursaron Matemáticas comprenden a los que también llevaron Física y a los que no la llevaron:

$$M = M\Omega = M(F + F^c) = MF + MF^c$$

Por último, el tamaño de un conjunto A se denotará por el símbolo $|A|$ o por $\#(A)$.

Usando la notación introducida anteriormente pasemos a contestar la primera pregunta: ¿Cuántos alumnos ya estudiaron Física pero no Matemáticas? Esta pregunta equivale a preguntar el tamaño del conjunto FM^c. Sabemos que

$$F = FM + FM^c$$

Ahora como datos tenemos el tamaño de F que es 60 alumnos y también el tamaño de FM que es de 40, podemos concluir que el tamaño de FM^c es 20. ¿Por qué? Como los átomos FM y FM^c son desunidos podemos asegurar, sin temor a contar doble, que el tamaño F es la suma de los tamaños de cada uno de los átomos que lo forman

$$|F| = |FM| + |FM^c|$$

Por lo tanto, $|FM^c| = |F| - |FM| = 60 - 40 = 20$

La segunda pregunta, de cuántos alumnos estudiaron Matemáticas pero no Física se refiere a contestar el tamaño del subconjunto MF^c. De la igualdad

$$M = MF + MF^c$$

se deduce que su tamaño es $|MF^c| = |M| - |MF| = 70 - 40 = 30$

La pregunta, de cuántos estudiaron Matemáticas o Física corresponde a contar los elementos de $M \cup F$, pero cuidado con contar doble, por ejemplo, si decimos que

$$|M \cup F| = |M| + |F| = 70 + 60 = 130$$

resulta ser un grave error: es imposible que su tamaño sea 130, dado que, en total solo hay 100 alumnos. La equivocación resulta porque M y F no son desunidos. Por lo tanto, hay que recurrir a alguna forma de escribir el subconjunto $M \cup F$ como una unión de subconjuntos desunidos como pueden ser las siguientes

$$M \cup F= MF^{c} + M^{c}F + MF$$

$$M \cup F= M + M^{c}F$$

$$M \cup F= F + F^{c}M$$

$$M \cup F + (M \cup F)^{c}= \Omega \quad \text{con} \quad (M \cup F)^{c} = M^{c}F^{c}$$

La primera expresión $M \cup F= MF^{c} + M^{c}F + MF$ resulta de la definición de unión de dos conjuntos que te recomendamos fuertemente para que fueras aficionado (puntos en al menos uno de los dos conjuntos).

Si usamos la primera igualdad resulta

$$|M \cup F|= |MF^{c}| + |M^{c}F| + |MF|= 30 + 20 + 40= 90$$

que puedes verificar usando las otras igualdades.

Aquí hemos hecho incapié en que la unión de dos conjuntos se escriba como una unión de subconjuntos desunidos para no contar doble, sin embargo, podemos olvidar esta preocupación si conocemos la fórmula de inclusión-exclusión

$$|M \cup F|= |M| + |F| - |MF|$$

que resulta de juntar $M \cup F= M + M^{c}F$ y a su vez de $F= MF + M^{c}F$

$(|M^{c}F|= |F| - |FM|)$.

La última pregunta, sobre los alumnos que no levantaron la mano (no han cursado ni Matemáticas ni Física), se puede lograr de cualquiera de las siguientes expresiones en pedazos desunidos

$$F^{c}= F^{c}M + F^{c}M^{c}; \qquad |F^{c}|= |\Omega| - |F|= 100 - 70= 30$$

$$M^{c}= M^{c}F + M^{c}F^{c}; \qquad |M^{c}|= |\Omega| - |M|= 100 - 60= 40$$

$$\Omega = M^cF^c + (M^cF^c)^c; \qquad (M^cF^c)^c = M \cup F$$

$$\Omega = M^cF^c + M \cup F$$

si usamos la última igualdad y conociendo que $|M \cup F| = 90$, resulta que

$$|M^cF^c| = |\Omega| - |M \cup F| = 100 - 90 = 10$$

2.3 En el control de calidad de la producción, se inspecciona rutinariamente una muestra aleatoria de los artículos fabricados para estimar el porcentaje de artículos defectuosos. Un fabricamente de vasos de plástico prueba 100 vasos examinando si tienen dos tipos de defectos. En un turno de trabajo se encontró que 8 vasos tienen el defecto a, 10 tienen el defecto b y 3 tienen ambos defectos. ¿Cuántos vasos inspeccionados no tenían ningún defecto?

SOLUCIÓN

Llame A al subconjunto de vasos con defecto tipo a y B al subconjunto de vasos con el defecto tipo b. Los vasos con ambos defectos están representados por la intersección $A \cap B$ que abreviaremos por AB. De los datos tenemos:

$$|A| = 8; \qquad |B| = 10; \qquad |AB| = 3$$

Nos preguntan cuántos vasos no tienen ningún defecto, que están representados por el subconjunto $A^c \cap B^c$ o simplemente A^cB^c. Para encontrar su tamaño podemos usar la siguiente relación

$$|A^cB^c| + |A^cB^c|^c = |\Omega|$$

donde Ω es el total de los 100 vasos inspeccionados, o sea que $|\Omega| = 100$. También sabemos por leyes de Morgan que

$$(A^cB^c)^c = A \cup B$$

por lo que

$$|A^cB^c| = |\Omega| - |A \cup B|$$

Ahora solo falta conocer el tamaño de la unión $A \cup B$ que podemos conocer por la siguiente fórmula

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |AB|$$

llamada la fórmula de "*inclusión-exclusión*", cuyo nombre se debe a que al sumar $|A|$ y $|B|$ estamos incluyendo puntos de más (aquellos puntos de B que también son comunes a los de A) y después los excluímos al restar $|AB|$ para corregir el doble conteo. Aplicando esta fórmula resulta

$$|A \cup B| = 8 + 10 - 3 = 15$$

por lo que

$$|A^c B^c| = |\Omega| - |A \cup B| = 100 - 15 = 85$$

Obsérvese que si no conociéramos la fórmula de inclusión-exclusión, podríamos contabilizar $A \cup B$ usando el principio elemental que consiste en expresar la unión a través de subconjuntos desunidos, por ejemplo

$$A \cup B = A + A^c B$$

con $A^c B$ obtenida de $B = BA + BA^c$, o sea que

$$|BA^c| = |B| - |AB| = 10 - 3 = 7$$

y por lo tanto

$$|A \cup B| = |A| + |A^c B| = 8 + 7 = 15$$

Nótese que, disimuladamente estamos derivando la fórmula de inclusión exclusión. Este disimulo lo repetimos para que te convenzas:

$$|A \cup B| = |A| + |A^c B| = |A| + |B| - |AB|$$

2.4 El Dr. Sánchez, en la semana pasada atendió, ya sea por un tobillo roto o un dolor de garganta, a 46 personas. De estos pacientes 32 tenían tobillos rotos y 20 dolor de garganta. ¿Cuántos pacientes fueron tratados por tener ambos problemas?

SOLUCION

Llame por T y G a los siguientes subconjuntos

T: pacientes con tobillo roto

G: pacientes con dolor de garganta

Se nos informa que

$$|T \cup G|= 46; \qquad |T|= 32; \qquad |G|= 20$$

y nos preguntan el tamaño de $T \cap G$ que abreviamos por TG.

Recurriendo a la ley de *"añade tamaños y después corriges"* (la ley de inclusión-exclusión) o sea,

$$|T \cup G|= |T| + |G| - |TG|$$

vemos que podemos despejar el tamaño que nos interesa:

$$|TG|= |T| + |G| - |T \cup G|= 32 + 20 - 46= 6$$

Conviene comentar que en este ejemplo no nos podemos salvar de usar la ley de inclusión-exclusión. Si lo intentamos, usando el principio elemental de expresar un subconjunto como unión de otros subconjuntos desunidos, fracasaremos. Por ejemplo, para dar el tamaño de TG se nos puede ocurrir la siguiente división

$$T= TG + TG^c$$

para despejar $|TG|= |T| - |TG^c|$, donde conocemos $|T|= 32$ pero no conocemos $|TG^c|$. Quizá podríamos usar otros datos para primero encontrar $|TG^c|$ por medio de alguna expresión que lo involucra como

$$G^c= TG^c + T^cG^c$$

donde necesitaríamos conocer el tamaño de G^c y T^cG^c, lo cual es imposible. ¿Por qué? No nos dan el total de pacientes que visitaron al médico la semana pasada, pues es posible que asistieran otros pacientes que no tenían ninguno de los dos males, o sea que para conocer el tamaño de G^c necesitamos $|\Omega|$:

$$|G^c|= |\Omega| - |G|$$

y como ve, es imposible, solo conocemos $|G|= 20$.
Otro intento para conocer $|TG|$ es analizar en qué otro conjunto está involucrado, por ejemplo

$$G= GT + GT^c$$

de esta división se nos ocurre despejar $|GT|= |G| - |GT^c|$ donde conocemos $|G| = 20$ pero no $|GT^C|$ y si intentamos analizar otra división en que aparezca $|GT^C|$ también fracasaremos.

2.5 Un lote de 20 plumas fuentes contiene 10 plumas que no son defectuosas, 8 plumas con defectos de tipo a, 5 con defectos de tipo b y 3 plumas con ambos tipos de defectos. Suponga que una pluma se selecciona al azar. Describa los siguientes eventos, indicando cuántos elementos tiene cada uno de ellos:

i) A: obtener una pluma con defecto tipo a.

ii) B: obtener una pluma con defecto tipo b.

iii) AB, AB^c, A^cB, A^cB^c.

iv) $A \cup B$, $A^c \cup B$, $A \cup B^c$, $A^c \cup B^c$.

SOLUCIÓN

Sea Ω el conjunto de todas las posibles selecciones al elegir una pluma del lote de 20 plumas. El espacio Ω tiene entonces, 20 elementos. Este espacio Ω se puede dividir de acuerdo a la característica de tener el defecto tipo a o no tenerlo, o sea:

$$\Omega = A + A^c$$

También puede descomponerse por la característica de tener el defecto tipo b o no tenerlo:

$$\Omega = B + B^c$$

Conjuntando ambas características, Ω queda descompuesto (dividido) de la siguiente manera:

$$\Omega = \Omega\,\Omega = (A + A^C)(B + B^C) = AB + AB^C + A^CB + A^CB^C$$

Esta descomposición en cuatro átomos se encuentra en la siguiente figura:

		Ω
B^C	AB^C	A^CB^C
B	AB	A^CB
	A	A^c

Se tiene información sobre el tamaño de A, B y de AB: $|A| = 8$, $|B|= 5$ y $|AB| = 3$, y además de Ω $(|\Omega|= 20)$. Con estos datos podemos determinar los tamaños de los átomos en que se ha descompuesto Ω y así determinar el tamaño de cualquier subconjunto de Ω, ya que se conoce que cualquier subconjunto se puede expresar en términos de los átomos. Observa que:

$$B= B\Omega= B(A + A^c)= BA + BA^c$$

y conociendo que $|B|= 5$ y $|AB|= 3$, resulta que:

$$|BA^c|= |B| - |AB|= 5 - 3= 2$$

También note que:

$$A= A\Omega= A(B + B^c)= AB + AB^c$$

lo que implica que:

$$|AB^c|= |A| - |AB|= 8 - 3= 5$$

Para determinar el tamaño del átomo restante A^cB^c, observe que:

$$\Omega= AB + AB^c + A^cB + A^cB^c$$

que implica:

$$|A^cB^c|= |\Omega| - |AB| - |AB^c| - |A^cB|= 20 - 3 - 5 - 2= 10$$

Con ésto, hemos encontrado el tamaño de todos los átomos y que corresponde a la pregunta (*iii*).

Para determinar el tamaño del conjunto $A\cup B$, puntos en al menos uno uno de los dos conjuntos A y B, este conjunto $A\cup B$ se puede escribir a través de átomos como:

$$A \cup B = AB^c + A^cB + AB$$

Por lo tanto, su tamaño es:

$$|A \cup B|= |AB^c| + |A^cB| + |AB|= 5 + 2 + 3 = 10$$

Otra forma de hacerlo, es usar la fórmula:

$$|A \cup B|= |A| + |B| - |AB|= 8 + 5 - 3= 10$$

Un tercer camino es usar la Ley de Morgan $A \cup B= (A^cB^c)^c$ con lo que:

$$|A \cup B|= |(A^cB^c)^c|$$

y luego usando la relación $|E^c|= |\Omega| - |E|$, resulta que:

$$|A \cup B| = |(A^cB^c)^c| = |\Omega| - |A^cB^c| = 20 - 10 = 10$$

¿Puede pensar un cuarto camino? TIPS: $A \cup B = A + A^cB$; $A \cup B = B + B^cA$

Para determinar el tamaño de $A^c \cup B$, escribimos este evento en átomos y recordando que su unión son los puntos en al menos uno de los dos conjuntos A^c y B, o sea:

$$A^c \cup B = A^cB^c + B(A^c)^c + A^cB = A^cB^c + AB + A^cB$$

y así $|A^c \cup B| = 10 + 3 + 2 = 15$

Similarmente usando:

$$A \cup B^c = A(B^c)^c + A^cB^c + AB^c = AB + A^cB^c + AB^c$$

resulta que su tamaño es:

$$|A \cup B^c| = |AB| + |A^cB^c| + |AB^c| = 3 + 10 + 5 = 18$$

Por último:

$$A^c \cup B^c = A^cB + AB^c + A^cB^c$$

y así:

$$|A^c \cup B^c| = 2 + 5 + 10 = 17$$

2.6 En un campamento de una semana, de los 40 excursionistas novatos que asistieron, 14 cayeron al lago, 13 sufrieron ronchas y 16 se perdieron cuando iban al pabellón destinado a las comidas. Tres de estos excursionistas tuvieron ronchas y cayeron al lago, cinco cayeron al lago y estuvieron perdidos, ocho tuvieron ronchas y estuvieron perdidos y 2 experimentaron todos los accidentes. ¿Cuántos excursionistas novatos no tuvieron ninguno de estos accidentes en toda la semana?

SOLUCIÓN

Indique por Ω, L, R y P a los subconjuntos siguientes:

Ω: grupo de todos los excursionistas novatos

L: excursionistas que cayeron al lago

R: excursionistas que tuvieron ronchas

P: excursionistas que estuvieron perdidos

Los datos del problema indican

$\|\Omega\| = 40$	$\|LR\| = 3$	$\|LRP\| = 2$
$\|L\| = 14$	$\|LP\| = 5$	
$\|R\| = 13$	$\|RP\| = 8$	
$\|P\| = 16$		

Nos preguntan el tamaño del subconjunto de excursionistas que no tuvieron ningún accidente o sea del subconjunto $L^c \cap R^c \cap P^c$ que abreviamos por $L^cR^cP^c$

Observa que

$$|L^cR^cP^c| + |(L^cR^cP^c)^c| = |\Omega|$$

y que la ley de Morgan nos recuerda que

$$(L^cR^cP^c)^c = (L^c)^c \cup (R^c)^c \cup (P^c)^c = L \cup R \cup P$$

por lo que

$$|L^cR^cP^c| = |\Omega| - |L \cup R \cup P|$$

Ahora la ley de inclusión-exclusión para la unión de tres eventos ("incluye los elementos de cada uno de los conjuntos y despúes excluye o corrige los que se contaron mas de una vez") que dice

$$|L \cup R \cup P| = |L| + |R| + |P| - |LR| - |LP| - |RP| + |LRP|$$

permite conocer el tamaño de la unión, pues conocemos los tamaños de los subconjuntos involucrados.

Intuitivamente la adición final de $|LRP|$ sugiere que corregimos de mas al restar todas las intersecciones de dos subconjuntos, por lo que hay que reponer el tamaño de LRP. Sustituyendo obtenemos

$$|L \cup R \cup P| = 14 + 13 + 16 - 3 - 5 - 8 + 2 = 29$$

Por lo tanto,

$$|L^cR^cP^c| = |\Omega| - |L \cup R \cup P| = 40 - 29 = 11$$

o sea que, 11 excursionistas de los 40 novatos no tuvieron ningún accidente, que aproximadamente representan el 25% de los novatos.

Ahora que ya sabemos manipular la ley de inclusión-exclusión conviene abrir un paréntesis para demostrarla. Parte de la siguiente expresión en conjuntos desunidos

$$L \cup R \cup P = L + L^cR + L^cR^cP$$

¿Viste el por qué de esta división? Sólo sigue la definición de la unión de tres conjuntos: puntos en al menos uno de los tres conjuntos L, R y P, para lo cual primero contamos indiscriminadamente todos los elementos de L, después agregamos los que están en R, excepto los que ya contamos anteriormente en L y finalmente los que están en P excepto los que ya contamos tanto en R la última vez como los que contamos en L la primera vez. El subconjunto L^cR se puede rescatar de la división $R = \Omega R = (L + L^c)R = LR + L^cR$ para obtener

$$|L^cR| = |R| - |LR|$$

También el conjunto L^cR^cP se puede rescatar de la siguiente división

$$P = \Omega P = (R + R^c)P = RP + R^cP$$

Ahora

$$R^cP = \Omega R^cP = (L + L^c)R^cP = LR^cP + L^cR^cP$$

que substituyendo en la igualdad anterior resulta

$$|P| = |RP| + |LR^cP| + |L^cR^cP|$$

A su vez, LR^cP puede relacionarse de

$$LP = LPR + LPR^c$$

para obtener

$$|LPR^c| = |LP| - |LPR|$$

Substituyéndolo en $|L^cR^cP| = |P| - |RP| - |LR^cP|$, obtenemos

$$|L^cR^cP| = |P| - |RP| - |LP| + |LRP|$$

Finalmente reemplazando $|L^cR| = |R| - |LR|$ y $|L^cR^cP| = |P| - |RP| - |LP| + |LRP|$ en la expresión $L \cup R \cup P = L + L^cR + L^cR^cP$ resulta la famosa ley de inclusión-exclusión:

$$|L \cup R \cup P| = |L| + |R| + |P| - |LR| - |RP| - |LP| + |LRP|$$

2.7 Una muestra de 100 personas en su mayoría de edad (con credencial de elector para no cometer el error de la encuesta del periódico *La Jornada*) reveló lo siguiente

i) 60 son hombres, 30 de los cuales no están afiliados a ningún partido político.

ii) 50 de los entrevistados están afiliados a un partido político.

iii) Se encontró que 20 de los que no están afiliados a un partido político votaron en las últimas elecciones, entre los cuales había 10 mujeres.

Particiona (divide) en varias formas al grupo de las personas entrevistadas para contestar varias preguntas. La primera es

a) ¿Cuántos hombres están afiliados a un partido político?

SOLUCIÓN

Sigue la siguiente notación

Ω: grupo de las 100 personas entrevistadas.

H: subconjunto de hombres.

A: subconjunto de personas afiliadas a algún partido.

V: personas que votaron.

Vamos a identificar con símbolos los datos del problema.

Los datos en el inciso (*i*) significan: $|H|= 60$ y $|HA^c|= 30$

Los datos en el inciso (*ii*) indican: $|A|= 50$

El inciso (*iii*) revela $|A^cV|= 20$ y $|A^cVH^c|= 10$.

¿Cómo contestar la pregunta de cuántos hombres están afiliados a un partido político? Bien, nos están preguntando sobre el tamaño de HA. Observa la siguiente división natural:

$$\{\text{hombres}\} = \{\text{hombres afiliados}\} + \{\text{hombres no afiliados}\}$$

$$H= HA + HA^c$$

Como los subconjuntos de la derecha son desunidos (ajenos o incompatibles) tenemos

$$|H|= |HA| + |HA^c|$$

De los datos notamos que $60= |HA| + 30$, por lo que

$$|HA|= 60 - 30= 30$$

b) ¿Cuántas mujeres están afiliadas a un partido político?

Nos preguntan el tamaño de H^cA. Para contestar, podemos como primer intento pensar en las mujeres e imaginar su división en mujeres afiliadas y no afiliadas:

$$H^c= H^cA + H^cA^c$$

y sin temor a contar doble (los subconjuntos de la derecha son desunidos) tenemos:

$$|H^c|= |H^cA| + |H^cA^c|; \qquad 40= |H^cA| + |H^cA^c|$$

Sin embargo, no conocemos $|H^cA^c|$ para despejar $|H^cA|$, por lo que nuestro primer intento falló. Pensemos ahora en los afiliados:

$$\{\text{afiliados}\}= \{\text{afiliados hombres}\} + \{\text{afiliados mujeres}\}$$

$$A= AH + AH^c; \qquad |A|= |AH| + |AH^c|; \qquad 50= 30 + |AH^c|$$

por lo que $|AH^c|= 50 - 30= 20$

c) ¿Cuántas mujeres no pertenecen a un partido político? ¿Qué nos piden en símbolos? H^cA^c

$$H^c= H^cA + H^cA^c$$

Como ya conocemos $|H^cA|= 20$ y $|H^c|= 40$, tenemos

$$|H^cA^c|= 40 - 20= 20$$

d) ¿Cuántas mujeres no afiliadas no votaron? Nos preguntan $|H^cA^cV^c|$

Para esta pregunta, pensemos primero en mujeres no afiliadas, o sea, H^cA^c y después dividimos este grupo de mujeres en las que votaron y las que no votaron:

$$H^cA^c= H^cA^cV + H^cA^cV^c$$

EL tamaño de H^cA^c es 20, lo encontramos en el inciso anterior y, de datos conocemos que H^cA^cV tiene tamaño 10, por lo tanto

$$|H^cA^cV^c|= |H^cA^c| - |H^cA^cV|= 20 - 10= 10$$

¿Cuántas personas que no están afiliadas a ningún partido no votaron? ¿A quién le tenía miedo el PRI en las pasadas elecciones del 6 julio de 1988?

Las personas no afiliadas que no votaron están representadas por A^cV^c Para encontrar su tamaño podemos empezar con los no afiliados A^c y dividirlos en los que votaron y los que no votaron:

$$A^c = A^cV + A^cV^c$$

Sabemos que $|A| = 50$, por lo que $A^c = |\Omega| - |A| = 100 - 50 = 50$. Del inciso (*iii*) de los datos también sabemos que $|A^cV| = 20$, por lo que

$$|A^cV^c| = |A^c| - |A^cV| = 50 - 20 = 30$$

El PRI le tenía miedo a una parte de los no afiliados y que votaron, o sea, A^cV y su tamaño es $|A^cV| = |A^c| - |A^cV^c| = 20$, pues los otros que votaron (afiliados) están fácilmente localizados y por lo tanto, contabilizados. Otra forma de contestar las preguntas es hacer una división de Ω en átomo o miniconjuntos generados al definir tres dicotomías en Ω, sólo que obtendremos tamaños de algunos átomos que no utilizaremos en las preguntas que nos piden. A manera de ilustración bosquejaremos cómo hacer las tres dicotomías, como conjuntar dos de ellas y como conjuntar las tres.

Indica por Ω al grupo de las 100 personas entrevistadas. Podemos dividir Ω siguiendo distintas dicotomías (división en subgrupos: elementos que tienen una propiedad específica y elementos que no la tienen).

Una dicotomía según el sexo:

$$\Omega = \{\text{hombres}\} + \{\text{mujeres}\} = H + H^c$$

Los números que aparecen en las casillas son datos del inciso (*i*) o derivado de él:

$$|H^c| = |\Omega| - |H| = 100 - 60 = 40$$

Otra dicotomía, según si están o no afiliados a un partido político:

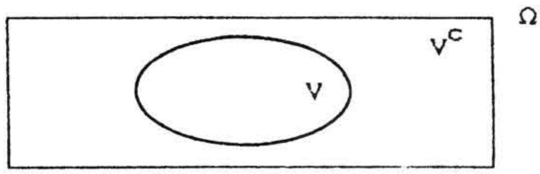
$$\Omega = \{\text{afiliados}\} + \{\text{no afiliados}\} = A + A^c$$

	Ω
A^c	50
A	50

Los números de las casillas son datos del inciso (*ii*) o derivado de él; $|A^c| = |\Omega| - |A| = 100 - 50 = 50$.

Una dicotomía más:

$$\Omega = \{\text{votaron}\} + \{\text{no votaron}\}$$



Conjuntando (considerando simultáneamente) dos dicotomías obtenemos las divisiones que aparecen en los tres cuadros que siguen

	H	H^c
A^c	HA^c 30	H^cA^c 20
A	HA 30	H^cA 20

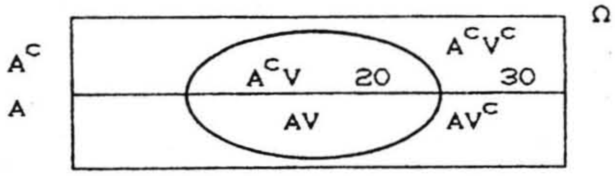
El número 30 que aparece en la casilla HA^c es dato [inciso (*i*)] y como consecuencia obtenemos

$$|HA| = |H| - |HA^c| = 60 - 30 = 30$$

EL número 20 en H^cA sale de $A = H^cA + HA$:

$$|H^cA| = |A| - |HA| = 50 - 30 = 20$$

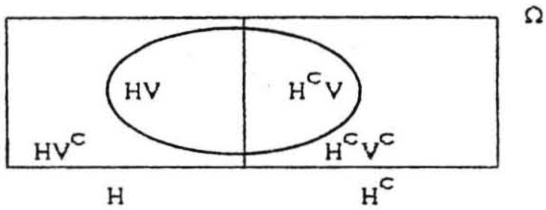
Conjuntando la dicotomía (afiliado, no afiliado) con la dicotomía (votar, no-votar) tenemos



El valor 20 en la casilla A^CV es dato (inciso *iii*). El número 30 en A^CV^C sale de $A^C = A^CV + A^CV^C$:

$$|A^CV^C| = |A^C| - |A^CV| = 50 - 20 = 30$$

Conjuntando la dicotomía (hombres, mujeres) y la dicotomía(votar, no votar), tenemos

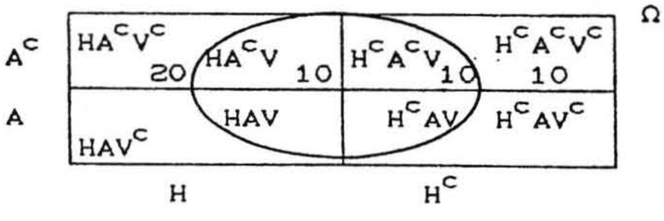


$$H^C = H^CV + H^CV^C$$

pero $\qquad H^CV^C = H^CV^CA + H^CV^CA^C$

$$H^C = H^CA + H^CA^C = \underbrace{H^CAV + H^CAV^C}_{20} + \underbrace{\overbrace{H^CA^CV}^{10} + \overbrace{H^CA^CV^C}^{10}}_{20}$$

Conjuntando las tres dicotomías Ω queda más dividido



El número 10 que aparece en la casilla H^CA^CV fue dato en el inciso (*iii*). Este número, junto con los números de las casillas anteriores permite conocer el tamaño de otros átomos.

Para conocer HA^cV usamos $A^cV= HA^cV + H^cA^cV$: $|HA^cV|= |A^cV| - |H^cA^cV|$
$= 20 - 10= 10$

Para conocer $H^cA^cV^c$ usamos $H^cA^c= H^cA^cV + H^cA^cV^c$:

$$|H^cA^cV^c|= |H^cA^c| - |H^cA^cV|= 20 - 10= 10$$

Para conocer HA^cV^c usamos $HA^c= HA^cV + HA^cV^c$:

$$|HA^cV^c|= |HA^c| - |HA^cV|= 30 - 10= 20$$

En las casillas donde no hay números parece difícil de encontrar sus tamaños. ¿Se te ocurre algo?

2.8 Un cierto pueblo de 100,000 habitantes tienen tres periódicos: I, II y III. La proporción de la población que lee estos periódicos es como sigue:

I: 10%	I y II: 8%
II: 30%	I y III: 2%
III: 5%	II y III: 4%
	I, II y III: 1%

a) Encuentra el número de gentes que sólo lee un periódico.

b) ¿Cuántas personas leen al menos dos periódicos?

c) Si los periódicos I y III son matutinos y el periódico II es vespertino, ¿cuántas personas leen al menos un periódico matutino mas un periódico vespertino?

d) ¿Cuántas personas leen solo un periódico matutino y un periódico vespertino?

SOLUCIÓN

Indica por Ω a la población total del pueblo y llame por A, B y C a los siguientes subconjuntos:

A: personas que leen el periódico I

B: personas que leen el periódico II

C: personas que leen el periódico III

a) La personas que solo leen un periódico comprenden los que solo leen el periódico I, mas lo que leen exclusivamente el periódico II y mas los que únicamente leen el periódico III. En símbolos

$$\{\text{solo leen un periódico}\} = AB^cC^c + A^cBC^c + A^cB^cC$$

¿Observaste que el evento de interés se escribió como una unión de pedazos desunidos? Fíjate y resultará claro, por lo tanto, el tamaño del conjunto de interés será la suma de los tamaños de los tres pedazos. Ahora el problema está en encontrar por separado el tamaño de cada pedazo y lo haremos de la manera "clásica" en que pensaría un estudiante, sin embargo, si ya notaste que estos pedazos son algunos de los átomos que resultan de conjuntar tres dicotomías de Ω $(\Omega = A + A^c;\ \Omega = B + B^c;\ \Omega = C + C^c)$ entonces te preguntarás por qué no mejor encontrar primero los tamaños de todos los átomos, aún los que no se necesiten, para después ir tomando sólo aquellos que estén involucrados en cada una de las preguntas. Este procedimiento lo presentaremos después (rápidamente en un esquema) de que encontremos el tamaño de AB^cC^c, de la manera "clásica".

Los habitantes que solo leen el periódico A o sea, el subconjunto AB^cC^c puede encontrarse usando alguna de las siguientes igualdades. La primera que se nos puede ocurrir es

$$A = (AB^cC^c) \cup (AB) \cup (AC)$$

Nota que no estamos usando el símbolo "+" para la unión porque los subconjuntos AB y AC no son desunidos:

$$AB = AB\Omega = AB(C + C^c) = ABC + ABC^c$$

$$AC = AC\Omega = AC\left(B + B^C\right) = ACB + ACB^C$$

Si sumáramos el tamaño de AB al tamaño AC estaríamos sumando dos veces a los habitantes ABC. Como queremos evitar este doble conteo descartamos este primer intento (aunque correcto) por otro que involucre solo pedazos desunidos. Esta división la podemos construir como sigue:

$$A = \left\{\begin{array}{c}\text{los que sólo}\\ \text{leen A}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{los que leen A y solo}\\ \text{uno de los otros dos}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{los que leen A}\\ \text{y los otros dos}\end{array}\right\}$$

El subconjunto intermedio del lado derecho (los que leen A y solo uno de los otros dos) puede dividirse en "*los que leen A y B pero no C*" y "*los que leen A y C pero no B*" y así la división anterior resulta

$$A = AB^CC^C + ABC^C + AB^CC + ABC$$

y ahora si los pedazos (átomos) del lado derecho son desunidos y por lo tanto, si logramos conocer sus tamaños, su suma la podemos realizar sin peligro. De los datos conocemos el tamaño de A y ABC; la incógnita que nos interesa saber es AB^CC^C, sin embargo, no tenemos el tamaño de ABC^C ni de AB^CC. No obstante echemos mano de los datos $|AB| = 8000$ (el 8% de población) y $|AC| = 2000$ (el 2%) que están involucrados en las siguientes igualdades

$$AB = ABC + ABC^C$$

$$AC = ACB + AB^CC$$

de donde respectivamente obtenemos:

$$|ABC^C| = |AB| - |ABC| = 8000 - 1000 = 7000$$

$$|AB^CC| = |AC| - |ABC| = 2000 - 1000 = 1000$$

Por lo tanto, de la igualdad $A = AB^CC^C + ABC^C + AB^CC + ABC$ encontrada anteriormente, resulta

$$|AB^CC^C| = |A| - |ABC^C| - |AB^CC| - |ABC| = 10000 - 7000 - 1000 - 1000$$
$$= 1000$$

Los tamaños de los otros átomos A^cBC^c y A^cB^cC involucrados en la primera pregunta se encuentran en forma similar. El átomo A^cBC^c está en la siguiente igualdad

$$B = BA^cC^c + BAC^c + BA^cC + BAC$$

de donde

$$|BA^cC^c| = |B| - |BAC^c| - |BA^cC| - |BAC|$$

Conocemos los datos $|B| = 30000$; $|BAC| = 1000$ y ya hemos calculado $|BAC^c| = 7000$, por lo que solo faltaría el tamaño de BA^cC. Para determinarlo usamos la igualdad

$$BC = BCA + BCA^c$$

$$|BCA^c| = |BC| - |BCA| = 4000 - 1000 = 3000$$

Por lo tanto,

$$|BA^cC^c| = |B| - |BAC^c| - |BA^cC| - |BAC|$$

$$= 30000 - 7000 - 3000 - 1000 = 19000$$

El tamaño del átomo A^cB^cC es

$$|A^cB^cC| = |C| - |AB^cC| - |A^cBC| - |ABC|$$

que tú adivinarás de dónde viene (descompón el conjunto C por átomos). Conocemos de los datos $|C| = 5000$; $|ABC| = 1000$ y ya calculamos anteriormente $|AB^cC| = 1000$ y $|A^cBC| = 3000$, con lo que resulta

$$|A^cB^cC| = 5000 - 1000 - 3000 - 1000 = 0$$

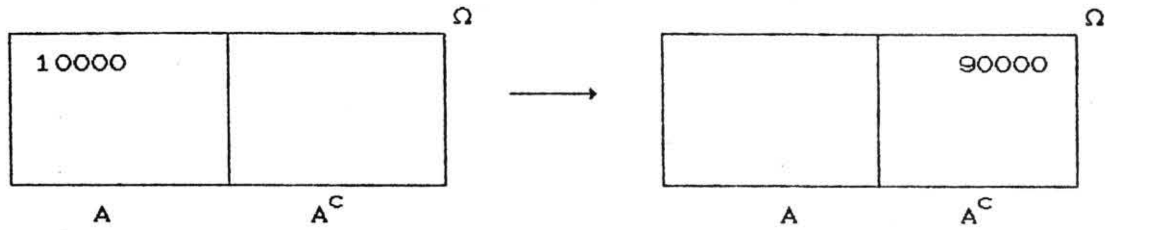
o sea, que ningún habitante compra únicamente el periódico III, si alguno lo compra también adquiere alguno de los otros dos.

Finalmente hemos llegado a la primera pregunta:

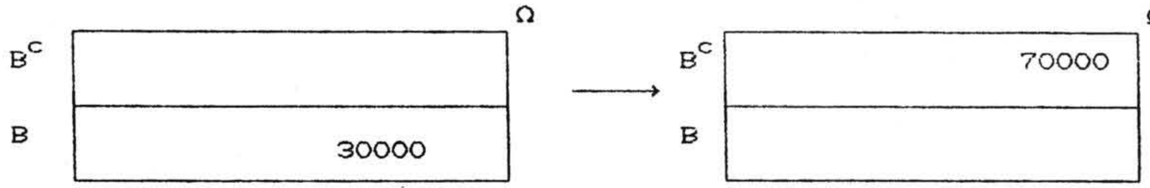
$$\left\{\begin{matrix}\text{los que sólo}\\ \text{leen un periódico}\end{matrix}\right\} = AB^cC^c + A^cBC^c + A^cB^cC = 1000 + 19000 + 0 = 20000.$$

Para el resto de las preguntas primero encontraremos todos los átomos. Para ello, observe cada una de las dicotomías (tener o no tener una propiedad particular) que se puedan asociar al conjunto Ω y las implicaciones sobre los tamaños de los correspondientes subconjuntos que surgen de cada dicotomía.

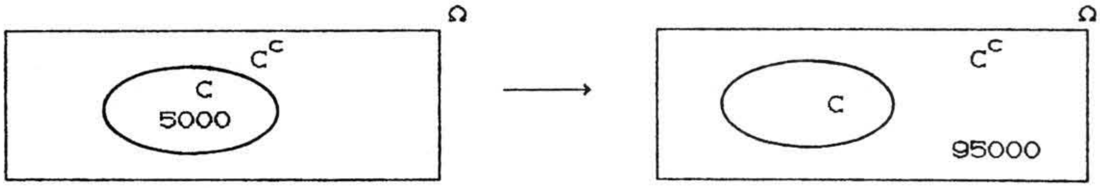
La dicotomía $\Omega = A + A^C$ se ilustra en el esquema de la izquierda junto con el tamaño que dan los datos y en el esquema de la derecha los tamaños que se pueden deducir del esquema izquierdo.



$$\left(\Omega = A + A^C \longrightarrow |A^C| = |\Omega| - |A| = 100000 - 10000 = 90000 \right)$$

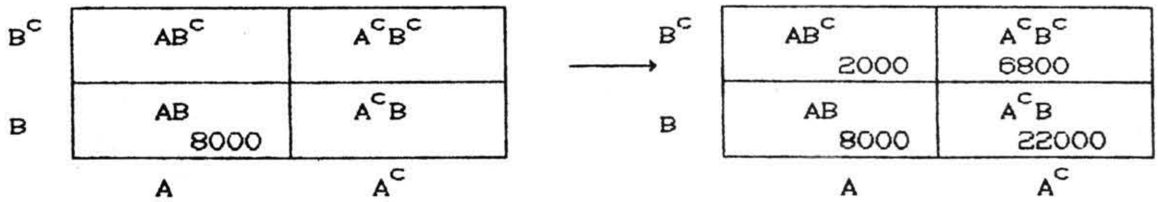


$$\left(\Omega = B + B^C \longrightarrow |B^C| = |\Omega| - |B| = 70000 \right)$$



Al conjuntar las dicotomías $\Omega = A + A^C$ y $\Omega = B + B^C$ resulta

$$\Omega = (A + A^C)(B + B^C) = AB + AB^C + A^CB + A^CB^C$$



¿Observaste cómo se rellenaron las casillas del esquema derecho? Por ejemplo, el tamaño de AB^C se determina de la relación $A= AB + AB^C$, de donde

$$|AB^C| = |A| - |AB| = 10000 - 8000 = 2000$$

Para el tamaño BA^C se usó la igualdad $B= BA + BA^C$ con lo que resulta

$$|BA^C| = |B| - |BA| = 30000 - 8000= 22000$$

El tamaño de A^CB^C lo puedes verificar usando cualquiera de las divisiones siguientes

$$B^C= B^CA + B^CA^C$$

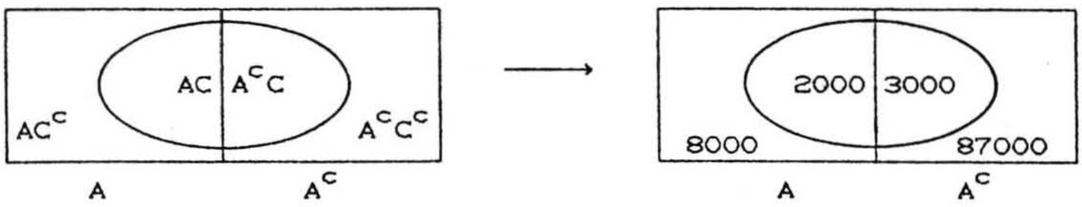
$$A^C= A^CB + A^CB^C$$

$$\Omega= AB + AB^C + A^CB + A^CB^C= A \cup B + A^CB^C$$

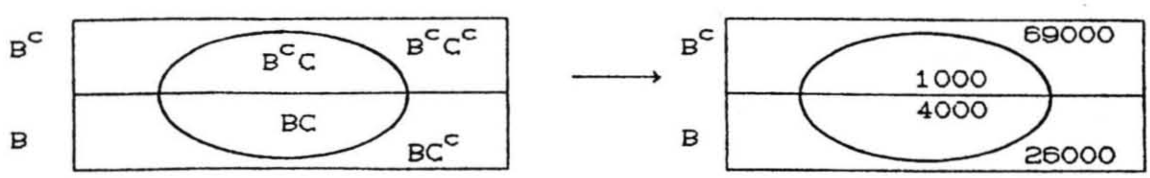
Al considerar simultáneamente las dicotomías $\Omega= A + A^C$ y $\Omega= C + C^C$ resulta la división

$$\Omega= (A + A^C)(C + C^C)= AC + AC^C + A^CC + A^CC^C$$

que se ilustra en la izquierda con las implicaciones que puedes verificar fácilmente

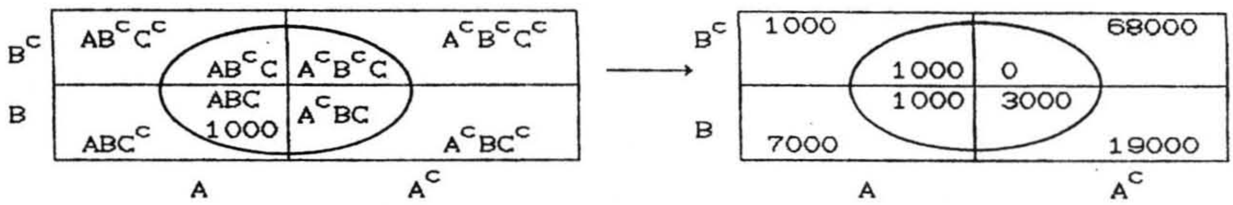


Las dicotomías $\Omega= B + B^C$ y $\Omega= C + C^C$ generan las divisiones que se muestran a continuación



La conjunción de las tres dicotomías $\Omega = A + A^C$, $\Omega = B + B^C$ y $\Omega = C + C^C$ producen una división de Ω en ocho átomos:

$$\Omega = (A + A^C)(B + B^C)(C + C^C) = ABC + ABC^C + AB^CC + AB^CC^C + A^CBC + A^CBC^C$$
$$+ A^CB^CC + A^CC^CC^C$$



Observa cómo se generaron los tamaños de algunos átomos combinando el dato

$$|ABC| = 1000$$

con cada uno de los datos

$$|AB| = 8000; \quad |AC| = 2000; \quad |BC| = 4000$$

A continuación se ilustra para algunos átomos

$$AB = ABC + ABC^C \longrightarrow |ABC^C| = |AB| - |ABC| = 8000 - 1000 = 7000$$
$$AC = ACB + ACB^C \Longrightarrow |ACB^C| = |AC| - |ACB| = 2000 - 1000 = 1000$$
$$BC = BCA + BCA^C \longrightarrow |BCA^C| = |BC| - |BCA| = 4000 - 1000 = 3000$$

Para el tamaño de otros requerimos otras cantidades previamente calculadas. Por ejemplo con la cantidad $|AB^C| = 2000$, la igualdad

$$AB^C = AB^CC + AB^CC^C$$

y el tamaño $|AB^CC| = 1000$ podemos encontrar el tamaño de AB^CC^C que es

$$|AB^CC^C| = |AB^C| - |AB^CC| = 2000 - 1000 = 1000$$

o también podríamos usar la relación

$$B^CC^C = B^CC^CA + B^CC^CA^C$$

2893868

sólo que necesitaríamos conocer $B^cC^cA^c$, lo cual es fácil encontrar de la siguiente versión de la Ley de Morgan

$$\Omega = B^cC^cA^c + (B^cC^cA^c)^c = B^cC^cA^c + B \cup C \cup A$$

la cual implica conocer $A \cup B \cup C$, etc.

Con los tamaños de todos los átomos (ver último cuadro derecho) podemos contestar fácilmente las otras preguntas:

b) Las personas que leen al menos dos periódicos incluye a los que leen exactamente dos periódicos y a los que leen tres y su tamaño es $|ABC^c| + |AB^cC| + |A^cBC| + |ABC| = 7000 + 1000 + 3000 + 1000 = 12000$

c) Los habitantes que leen al menos un periódico matutino (el I o el III) mas un periódico vespertino (el II) corresponde a contabilizar

$$|ABC^c| + |A^cBC| + |ABC| = 7000 + 3000 + 1000 = 11000$$

d) Los que leen un solo periódico matutino y un vespertino suman

$$|ABC^c| + |A^cBC| = 7000 + 3000 = 10000$$

2.9 Muestra que si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$. Si gustas, muéstralo gráficamente y después das una prueba más formal.

SOLUCIÓN

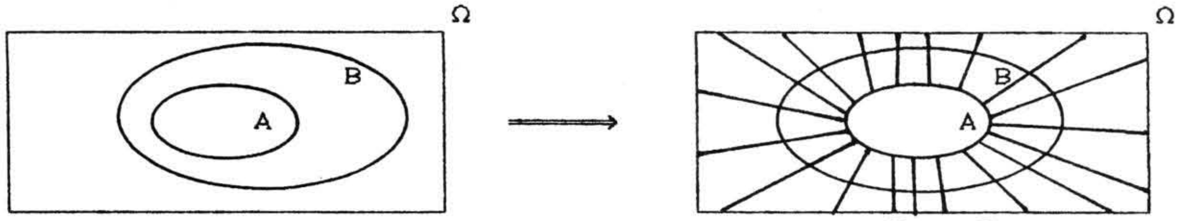
Para probar que $B^c \subset A^c$, elige cualquier elemento de B^c, digamos x y a través de una secuencia de implicaciones llegas a la conclusión de que también $x \in A^c$. Una forma de llegar es la siguiente:

$$x \in B^c \Longrightarrow x \notin B \qquad \text{(por definición de complemento)}$$

Por otro lado, no olvides la hipótesis de que $A \subset B$, entonces el resultado $x \notin B$ implica que $x \notin A$, ¿por qué? Observa que si no fuese así, es decir, si $x \in A$, entonces $x \notin B$ con $x \in A$ negaría la hipótesis de que $A \subset B$, por consiguiente justificamos la aseveración de que $x \not\in A$.

Ahora, $x \not\in A$ implica fácilmente que $x \in A^c$ lo cual se quería probar.

La ilustración de la proposición es



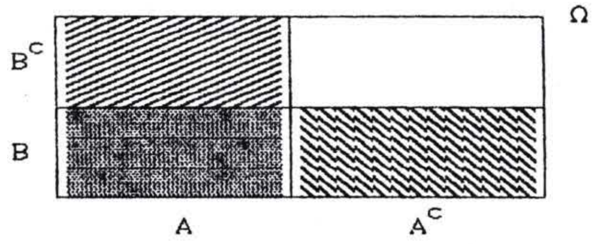
$A \subset B$ $\qquad\qquad$ $B^c \subset A^c$

RESUMEN

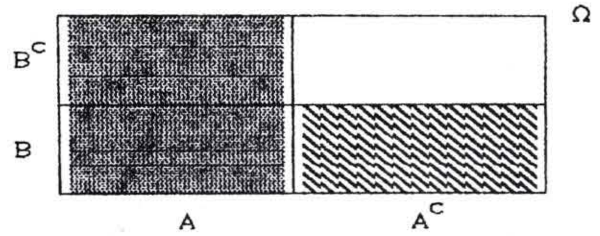
A continuación se te dan algunas de las fórmulas más necesarias en la solución de problemas que involucran conjuntos. Es importante que marques y sombrees algunas áreas que faltaron de los esquemas dados posteriormente.

1. LA UNION DE DOS CONJUNTOS: TODO LO QUE QUERÍAS SABER

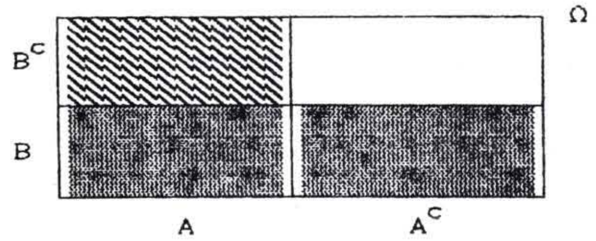
$A \cup B = AB^C + A^CB + AB$



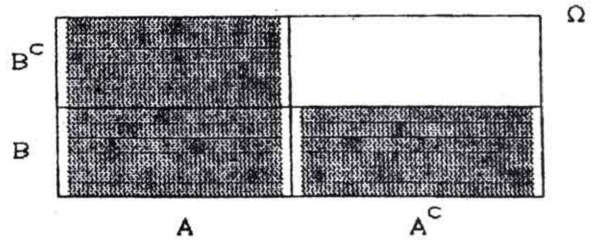
$A \cup B = A + A^CB$



$A \cup B = B + B^CA$



$A \cup B = (A^CB^C)^C$



$|A \cup B| = |A| + |B| - |AB|$

$|A \cup B| \geq |A|; \quad |A \cup B| \geq |B|; \quad |A \cup B| \geq \max \{|A|, |B|\}$

$|A \cup B| = |A| + |A^cB|; \; A^cB \subseteq B;$ por lo tanto, $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

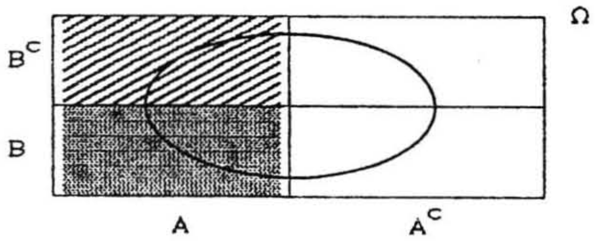
En resumen

$$|A| + |B| \geq |A \cup B| \geq \max \{|A|, |B|\}$$

2. LA UNIÓN DE TRES CONJUNTOS.

a) $A \cup B \cup C = A + A^cB + A^cB^cC$

b) $A \cup B \cup C = AB^cC^c + A^cBC^c + A^cB^cC + ABC^c + AB^cC + A^cBC + ABC$



c) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|$

3. LA INTERSECCIÓN DE DOS CONJUNTOS.

$AB \subset A, \quad AB \subset B;$ por lo tanto $|AB| \leq \min \{|A|, |B|\}$

PROBLEMAS

Un restaurante, deseando mejorar la atención a sus clientes, entrevista durante una semana a 100 de ellos. Un empleado resume los cuestionarios de la siguiente forma: a 82 clientes les gusta el helado y a 62 les gusta el pastel. ¿A cuántas personas les gusta ambos postres?

a) ¿Puedes contestar exactamente? ¿Qué tanto puedes acotar tu respuesta?

TIP: Compara conjuntos, el que te interesa con otros conjuntos con tamaño conocido.

b) Considera que para afinar tu estimación regresas con el empleado que condensó los cuestionarios y te informa adicionalmente que a cada uno de los entrevistados les gusta al menos uno de los dos postres. ¿Te ayudó esta información adicional a afinar tu respuesta?

R: a) 0 – 62; b) 44

Al interrogar a un grupo de alumnos de tercer trimestre acerca de sus inscripciones a los cursos de Matemáticas, Física y Química, se encontró que de los 400 alumnos entrevistados:

289 cursaban Matemáticas	83 cursaban Matemáticas y Física
146 cursaban Física	217 cursaban Maremáticas y Química
275 cursaban Química	63 cursaban Física y Química.

NOTA: TODOS LOS ALUMNOS CURSABAN AL MENOS UNA MATERÍA

Elabora diagramas de Venn y determina el número de alumnos que:

a) Cursan tres

b) Cursan Matemáticas pero no Química;

c) Física pero no Matemáticas;

d) Química pero no Física;

e) Matemáticas o Química pero no Física;

2893868

f) Matemáticas pero no Física ni Química.

A) $|M \cap F \cap Q| = 53$

B) $|M \cap Q'| = 72$

C) $|F \cap M'| = 63$

D) $|Q \cap F'| = 212$

E) $|(M \cup Q) \cap F'| = 254$

F) $|M \cap F' \cap Q'| = 42$

2. Después de ensamblar las televisiones, se pasan a una inspección final donde se identifican tres tipos de defectos: críticos, moderados y ligeros que se codifican por C, M y L respectivamente. En 1000 televisores se obtuvieron los siguientes resultados:

Aparatos que sólo tienen defectos críticos	3%
Aparatos que sólo tienen defectos moderados	2%
Aparatos que sólo tienen defectos ligeros	10%
Aparatos que sólo tienen defectos críticos y moderados	4%
Aparatos que sólo tienen defectos críticos y ligeros	5%
Aparatos que sólo tienen defectos moderados y ligeros	3%
Aparatos que tienen los tres tipos de defectos	1%

a) ¿Cuántos aparatos no tienen defectos? ¿En qué porcentaje (%)?

b) Los aparatos que tengan defectos críticos o moderados o ambos, se vuelven a reensamblar completamente. ¿Qué fracción de aparatos cae en esta categoría?

R: *a)* 72%

b) 18%

TIPS: El primer porcentaje de 3% se refiere a CM^cL^c, el segundo porcentaje se refiere a C^cML^c, etc.

3. Un puesto para inspeccionar la seguridad de los automóviles les encontró, en 1000 carros revisados, los siguientes resultados:

100 necesitaban alineación, ajuste de frenos y ajuste de luces.
325 necesitaban dos de los tres tipos de servicio.
125 necesitaban revisión de ajuste de luces y ajuste de frenos.
550 necesitaban alineación.

a) Cuántos carros necesitaban solamente alineación?

b) Cuántos que no necesitaban alineación, no necesitan más de uno de los otros dos tipos de servicio?

R : *a*) 150
b) 425

TIPS: Para (*a*) descompón A en subconjuntos desunidos (átomos o miniconjuntos).
$|LFA^c| = 25$ ¿Por qué?
$|AFL^c + ALF^c| = 300$ ¿Por qué?
Para (*b*) descomponga A^c en átomos.

4. Una estación de televisión realiza una encuesta telefónica en su localidad para determinar cuántas personas han visto tres programas especiales que se han transmitido recientemente. Sean: A el evento de que la persona entrevistada haya visto el programa *a*, B el evento de que haya visto el programa *b* y C el evento de que haya visto el programa *c*. Un total de 1000 personas son interrogadas por teléfono. Los resultados son:

221 han visto al menos *a*;
209 han visto al menos *b*;
112 han visto al menos *c*;
197 han visto al menos dos de los programas;
45 han visto todos los programas;
62 han visto al menos *a* y *b*;

El número de personas que han visto al menos *a* y *b* es dos veces más grande que el número de aquellos que han visto al menos *b* y *c*.

¿Son congruentes los datos proporcionados? ¿Por qué?

a) ¿Cuántas han visto al menos un programa especial?

b) ¿Cuántas han visto únicamente el programa especial *c*?

5. En un intento por conocer los intereses de sus agremiados, una Asociación para el Mejoramiento del Ambiente en Monterrey, envía cuestionarios por correo a los cerca de 2500 miembros. Alrededor de 600 miembros contestan. De estos que respondieron, el 97% dijo que leían regularmente la gaceta que recibían periódicamente de la organización.

   a) ¿Sería razonable inferir que todos los miembros de la asociación leen regularmente la gaceta? ¿Por qué?

   b) Supón que en lugar de enviar los cuestionarios por correo, la asociación toma su lista de membresías y selecciona aquellos miembros que por ejemplo están en los lugares 10, 20, 30, etc. de esa lista, los contacta personalmente y les pregunta si leen regularmente la gacetilla. Considera que casi toda la gente que fue entrevistada estaba dispuesta a contestar honestamente, ¿por qué este método daría resultados más confiables?

   c) En la encuesta original ¿a quién se está contabilizando? ¿cuántos miembros no respondieron? ¿cuántos miembros que respondieron no leen la gaceta?

   TIPS: Usa la siguiente notación

   Ω: Todos los miembros de la asociación y a todos se les manda el cuestionario.

   R: Los miembros que respondieron el cuestionario.

   L: Los miembros que leen la gaceta.

$$LR = 582, \quad L^cR = 18 \qquad L^c \cup R^c = 1918$$

6. Se tienen 6 computadoras con las siguientes especificaciones

COMPUTADORA	UNIDAD ARITMÉTICA DE PUNTO FLOTANTE	MEMORÍA DE DISCO MAGNETICO	TERMINAL GRÁFICA
I	Si	Si	No
II	Si	Si	Si
III	No	No	No
IV	No	Si	Si
V	No	Si	No
VI	No	Si	Si

¿Cuántas computadoras tienen uno o más de los tres tipos de hardware?

R: 5

7. Treinta carros fueron ensamblados en una fábrica. Las opciones que tuvieron son: radio, aire acondicionado y llantas cara blanca. Se sabe que 15 carros tenían aire acondicionado y 6 tenían llantas cara blanca. Además 3 carros tenían todas las opciones.

   a) A lo más ¿cuántos carros no tenían ninguna opción?, es decir, da una cota superior para el total de carros que no tienen ninguna opción. No se vale la cota superior de 30.

   b) Al menos ¿cuántos carros no tienen ninguna opción?, es decir, encuentra una cota inferior para los carros con las características que se describen en el inciso A).

   c) A lo más ¿cuántos carros tenían al menos una de las tres opciones? Justifica las siguientes cotas: 29, 23.
   TIP: Para dar la cota 23 debes usar la información de que 3 carros tienen todas las opciones.

R: a) 15
b) 7

8. Entre 200 alumnos, 50 cursas probabilidad, 140 economía y 24 ambos cursos. El examen de tales cursos está establecido para mañana, por lo que solamente los que no toman ninguno de esos cursos podrán ir a la fiesta de esta noche.

a) ¿ Cuántos alumnos irán a la fiesta?

Ahora, entre los 200 alumnos, hay 60 novatos (que están en su primer año). Entre estos novatos hay 20 que cursan probabilidad, 45 economía y 16 ambas materias.

b) ¿Cuántos alumnos veteranos irán a la fiesta?

R: a) 34

b) 23

REFERENCIAS

- Chung, K. L., "*Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*" 3a. Ed. Springer Verlag, New York, 1979. Traducido por Reverté.

Taller de probabilidad
y estadística
Conjuntos

Se terminó
de imprimir
en el mes de marzo
del año 2001
en los talleres
de la Sección
de Impresión
y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo
a cargo
de la Sección
de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
100 ejemplares
más sobrantes
para reposición.

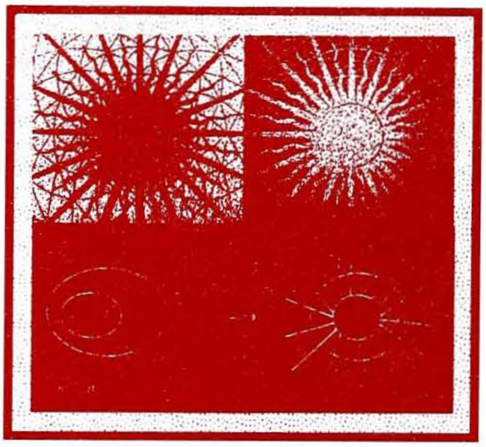
Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2893868

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro



0092101 08603

8.00 - $ 8.00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales